16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

Įvadas

Pirmiausia panagrinėkime grupę uždavinių, kuriuos galime spręsti invariantų metodu ir kurių dauguma yra susiję su vadinamaisiais „šachmatų lentos“ uždaviniais.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Turime 8x8 šachmatų lentą ir domino kauliukų rinkinį (1x2 stačiakampiukų). Tarkime, šachmatų lentoje iškirpome vieną jos kampinį langelį. Ar bus įmanoma padengti likusius šachmatų lentos langelius domino kauliukais?

Atsakymas / sprendimas

Be abejo, ne. Iškirpus vieną langelį (nesvarbu kurį), liks 63 langeliai, t. y. nelyginis langelių skaičius. Kaip bedėliotume domino kauliukus, jais galėsime padengti tik lyginį skaičių langelių.

Šis paprastutis uždavinys aiškiai pademonstruoja metodą, leidžiantį spręsti ir kur kas sudėtingesnius uždavinius. Yra daugybė uždavinių, kuriuose reikia kažką išsiaiškinti apie galutinę „sistemos“ būseną, kai ją („sistemą“) galima įvairiai keisti (šiuo atveju galėjome visaip kaitalioti domino kauliukų išdėstymą; turėjome išsiaiškinti, ar tokiu būdu pavyks padengti šachmatų lentą). Aiškėja, jog perrinkti visus įmanomus variantus yra labai sunku ar net neįmanoma (net ir šiame paprastame uždavinyje perrinkinėti visus variantus, „nepametant“ nė vieno, nelengva). Tačiau kartais egzistuoja tam tikras dydis, kuris nekinta viso „sistemos“ kitimo metu. Šis dydis ir vadinamas *invariantu*. Gali būti, jog išsiaiškinus tą nekintantį dydį bus įmanoma kai ką nuspręsti ir apie galutinę „sistemos“ būseną, t. y. atsakyti į uždavinio klausimą. Kartais tas invariantas yra labai lengvai pastebimas (tarkime, duotame pavyzdyje tai buvo langelių skaičiaus lyginumas), kartais jį kur kas sunkiau pastebėti arba reikia imtis papildomų veiksmų (pavyzdžiui, įvairių „spalvinimų“) tam, kad „sukurtume“ invariantą. Bet kokiu atveju, šis metodas gali būti labai veiksmingas. Jis ypač dažnai naudojamas įvairiems „šachmatų lentos“ uždaviniams spręsti ir ne tik. Svarbu išmokti pastebėti tai, kas galėtų būti invariantu.

Invariantų lengviausia mokytis nagrinėjant pavyzdžius. Todėl pateiksime dar keletą pavyzdžių, kurie padės suprasti metodo idėją.

Kaip spręsti?

2 pavyzdys

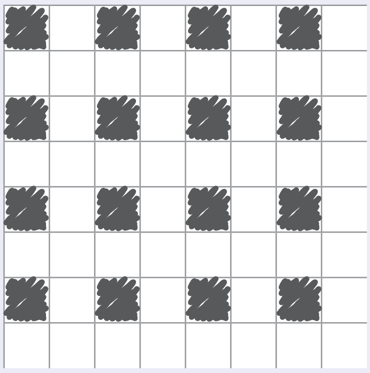
Iš šachmatų lentos priešingų kampų išpjauname po 1 langelį. Ar šiuo atveju galėsime domino kauliukais padengti šachmatų lentą?

Atsakymas / sprendimas

Ne, negalima. Bus išpjauti 2 juodi arba 2 balti langeliai. Tarkime, juodi. Tada liks 30 juodų ir 32 balti langeliai, kuriuos reikės padengti. Tam, kad padengtume šiuos 62 likusius langelius, turėsime panaudoti 31 domino kauliuką, bet jie negalės padengti 32 baltų ir 30 juodų langelių, nes kiekvienas domino kauliukas dengia lygiai 1 juodą ir 1 baltą langelį.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

Kaip spręsti?



1 pav.

3 pavyzdys

Stačiakampės dėžutės dugnas buvo padengtas 1×4 ir 2×2 stačiakampėmis plytelėmis. Išpylus plyteles iš dėžutės, viena 2×2 plytelė pasimetė. Vietoj jos buvo pasiūlyta 1×4 plytelė. Įrodykite, kad dabar nepavyks plytelėmis padengti dėžutės dugno.

Atsakymas / sprendimas

Čia su paprasta šachmatų lenta neišsiversime. Reikia „nudažyti" langelius, kaip pavaizduota 1 pav. Nagrinėkime, kiek juodų langelių tokiu atveju dengs 2×2 ir 1×4 plytelės: bet kuri 2×2 plytelė dengs lygiai 1 juodą langelį, o 1×4 plytelė dengs 0 arba 2 juodus langelius. Taigi ir vėl, kaip besistengtume, pakeitus 2×2 plytelę 1×4 plytele, nepavyktų padengti dėžutės dugno („kirsis" lyginumas).

Čia nagrinėjome vadinamuosius „šachmatų lentos" uždavinius. Šio tipo uždaviniai pateikti pirmiausiai. Tačiau invariantų uždaviniai tikrai neapsiriboja tokio tipo uždaviniais. Kaip minėjome, *invariantu* gali būti bet kokia nagrinėjamos „sistemos" savybė, kuri išlieka nepakitusi įvairiai kaitaliojant pačią sistemą. Labai dažnai tai yra lyginumas arba apskritai dalumas. Pabandykite tuo remtis ir surasti *invariantus* vėlesniuose uždaviniuose (dažniausiai reikės remtis dalumo savybėmis).

Uždaviniai

1. Ar galima 10x10 šachmatų lentą padengti 1x4 plytelėmis?

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

2. Lentelėje 4x4 surašyti pliusai ir minusai kaip parodyta 2 paveikslėlyje. Leidžiama keisti ženklus priešingais vienu metu visuose langeliuose, esančiuose viename stulpelyje, vienoje eilutėje, vienoje įstrižainėje ar tiesėje, lygiagrečioje bet kuriai įstrižainei (taip pat ir bet kuriame kampiniame langelyje).

a) Ar įmanoma, atliekant šias operacijas, gauti lentelę, kurioje nebūtų nė vieno minuso?
b) Išspręskite šį uždavinį lentelei, pavaizduotai 3 paveikslėlyje.

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

2 pav.

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

3 pav.

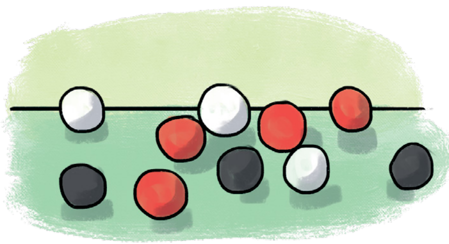
3. Ant lentos užrašyta keletas nuliukų, vienetukų bei dvejetukų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du nelygius skaičius ir vietoj jų parašyti skaičių, nelygų nė vienam iš jų (t. y. 0 vietoj 1 ir 2, 1 vietoj 0 ir 2, 2 vietoj 0 ir 1). Įrodykite, kad jeigu po kelių tokių operacijų lentoje liks tik vienas skaičius, tai jis nepriklausys nuo to, kokia tvarka vyko trynimas.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

4. Ar įmanoma ant languoto popieriaus nuspalvinti 25 langelius taip, jog kiekvienas langelis turėtų nelyginį skaičių nuspalvintų kaimyninių langelių? (Kaimyniniais langeliais vadinami tie, kurie turi bendrą kraštinę.)

5. Iš pradžių didžiulė salė yra tuščia. Kiekvieną minutę į kambarį arba įeina vienas žmogus, arba du išeina. Ar gali po 3^{1999} minučių salėje būti $3^{1000} + 2$ žmonės?

6. Ant stalo yra *a* juodų, *b* baltų ir *c* raudonų kamuoliukų. Vienu žingsniu galite pasirinkti bet kuriuos du skirtingų spalvų kamuoliukus ir pakeisti juos vienu trečios spalvos kamuoliuku. Jeigu galiausiai liks tik vienas kamuoliukas, jo spalva nepriklausys nuo to, kokia tvarka vyks pakeitimai. Kokiu atveju gali būti pasiekta tokia galutinė situacija?



16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

7. Kiekvienas iš skaičių nuo 1 iki 10^6 yra pakartotinai keičiamas savo skaitmenų suma tol, kol turime 10^6 vienaženklių skaičių. Šioje situacijoje bus daugiau 1-tų ar 2-tų?

8. Didelėje tarptautinėje konferencijoje dalyviai pasisveikina paspausdami rankas. Konferencijos dalyvį vadinsime „nelyginiu“, jei jis paspaudė rankas nelyginį skaičių kartų. Kitu atveju dalyvį vadinsime „lyginiu“. Įrodykite, kad bet kuriuo momentu yra lyginis skaičius „nelyginių“ dalyvių.

9. Apskritimas padalintas į 6 sektorius. Tada į sektorius (tarkime, pagal laikrodžio rodyklę) įrašyti skaičiai 1, 0, 1, 0, 0, 0. Vienu ėjimu galima padidinti du šalia esančius skaičius vienetu. Ar atlikus kažkiek tokių ėjimų įmanoma sulyginti visus skaičius?