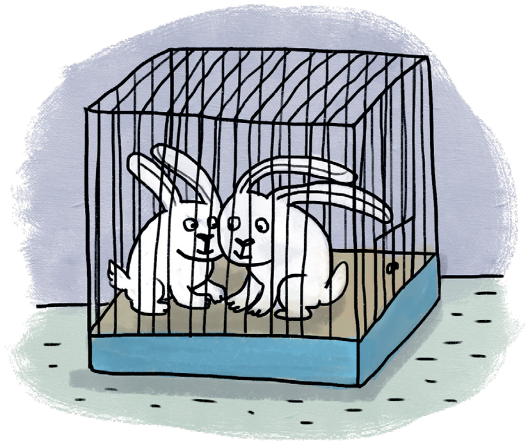
13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

Įvadas



Klasikinė ir viena aiškiausių formuluočių

Jeigu šešis zuikius turime patalpinti į penkis narvelius, tai bent viename narvelyje bus ne mažiau kaip du zuikiai.

Apibendrintai

Jei į n narvelių turime patalpinti $(n \cdot k + 1)$ zuikį, tai bent viename narvelyje atsidurs ne mažiau kaip $k + 1$ zuikis.

Pastaba

Spręsdami uždavinius pagal Dirichlė metodą, negalime pasakyti, kuriame būtent „narvelyje" tupės tie du „zuikiai", todėl šis metodas iš esmės naudotinas egzistavimui įrodyti. Tačiau tų įrodymų gali būti daug ir įvairių.

Strategija

I. Išsiaiškinkite, kas yra „zuikiai" – tai, ko bent keli turi turėti kokią nors tą pačią savybę.
II. Susikurkite „narvelius". Reikia užtikrinti du dalykus: pirma, turi būti mažiau „narvelių" nei „zuikių"; antra, jei į „narvelį" paklius bent du „zuikiai", gausite tai, ko norite.
III. Raskite taisyklę, pagal kurią priskirsite „zuikius" į „narvelius". Kartais ne taip paprasta pritaikyti tinkamą taisyklę.

Štai keli elementarūs Dirichlė principo taikymo pavyzdžiai.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Įrodykite, kad bet kurioje 13 žmonių grupėje atsiras bent du, kurie gimė tą patį mėnesį.

Atsakymas / sprendimas

Kadangi „zuikių" (žmonių) yra 13, o „narvelių" (mėnesių) – tik 12, tai įrodymas akivaizdus – kaip bepriskirtume žmones mėnesiams, bent vienam mėnesiui teks priskirti bent du žmones.

2 pavyzdys

Įrodykite, kad iš bet kurių trijų natūraliųjų skaičių galima išrinkti du, kurių suma dalytųsi iš 2.

Atsakymas / sprendimas

Visus natūraliuosius skaičius galima suskirstyti į dvi grupes: lyginius ir nelyginius. Taigi „narveliai" šiuo atveju yra lyginumas. Jei turime bet kokius tris natūraliuosius skaičius, tai bent du iš jų priklausys kuriam nors vienam „narveliui" – lyginiams arba nelyginiams skaičiams. Bet kokiu atveju jų suma bus lyginė (sudėję du lyginius arba du nelyginius skaičius, gauname lyginį skaičių). Taigi įrodyta.

13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad tarp bet kurių 6 skaičių atsiras du, kurių skirtumas dalysis iš 5.

2. 31 diplomatas iš Graikijos, Italijos, Rusijos, Suomijos, Australijos ir Zimbabvės po susitikimo vakarieniavo kartu. Įrodykite, kad nors vienai šaliai atstovavo ne mažiau kaip 6 diplomatai.

3. 13 mokyklų atstovai dalyvavo atletinėse varžybose, kurių pažiūrėti susirinko 1 514 sirgalių. Įrodykite, kad bent už vieną mokyklą sirgo ne mažiau kaip 117 žmonių.

4. Įrodykite, kad Vilniuje gyvena bent du žmonės, turintys tiek pat plaukų ant galvos.

13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

5. Įrodykite, kad jei a, b, c yra sveikieji skaičiai, tai $(a - b)(b - c)(a - c)$ yra lyginis skaičius.

6. Švariai išplautų drabužių maišelyje yra 10 porų skirtingų kojinių, susimaišiusių tarpusavyje. Jei tamsoje, pakuodamiesi lagaminą, iš maišelio turėtumėte pasirinkti kojinių, kiek mažiausiai kojinių reikėtų paimti, kad būtumėte tikri, jog turėsite bent vieną porą kojinių?

7. Tarkime, 7 studentai laiko egzaminą. Egzamine – keturi klausimai, o kiekvienas studentas pasirenka atsakinėti į lygiai 2 klausimus. Įrodykite, kad bus du studentai, pasirinkę tuos pačius 2 klausimus.